Chapitre IV

ABSORPTION ET DISPERSION.

Modulant tour à tour sur la lyre d'Orphée
Les soupirs de la sainte et les cris de la fée.

G de NERVAL

Chimères, El Desdichado

*L'équation de d'*ALEMBERT *reflète une situation idéale, car elle néglige tous les phénomènes dissipatifs. Sur un exemple arbitraire, nous verrons comment peut se modifier l'équation et quelles en sont les conséquences. L'une est prévisible : l'onde se propage en s'amortissant, car les phénomènes dissipatifs absorbent de l'énergie aux dépens de l'onde. L'autre est que la vitesse de l'onde dépend de sa fréquence et nous en verrons aussi les conséquences pratiques. A cet effet, nous introduirons la notion de modulation ; bien qu'elle ne figure pas au programme, elle permet de mieux appréhender ce qui se passe, d'ouvrir le cours sur le monde de la télécommunication et d'offrir un outil bien utile en optique physique.*

IV-1 Corde vibrante amortie

Sans échange d'énergie avec l'air, une corde qui vibre ne pourrait pas générer d'onde sonore. Pas de frottement, pas de musique ! Un bout de corde de longueur dx subit donc une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse et à sa taille donc à dx ; on rajoute ce terme à l'équation du mouvement :

$$\mu \,\mathrm{d}x \,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \cdots - \lambda \,\frac{\partial y}{\partial t} \,\mathrm{d}x$$

En posant $\mu/\lambda = \tau$, homogène à un temps, les calculs du chapitre 1 conduisent alors à :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\,\frac{\partial y}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

IV-2 Relation de dispersion

Le chapitre précédent montre que tout phénomène peut être considéré comme somme de sinusoïdes. On cherche donc une solution de la forme :

$$y(x,t) = Re(\underline{y}(x,t)) = Re\{\underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)]\}$$

Par la suite, dans notre cours, nous omettrons de noter Re et nous confondrons dans la notation y et $\underline{y}$, et on lira donc fréquemment $y(x,t) = \underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)]$ et il importera de comprendre le sous-entendu. On rappelle que les opérateurs $\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial t^2$, $\partial/\partial x$ et $\partial^2/\partial x^2$ se transcrivent alors par une simple multiplication par, respectivement, $\jmath\,\omega$, $(\jmath\,\omega)^2 = -\omega^2$, $-\jmath\,k$ et $(-\jmath\,k)^2 = -k^2$.

L'équation précédente devient donc :

$$-\omega^2\,\underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)] + \jmath\,\frac{\omega}{\tau}\,\underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)] = -c^2\,k^2\,\underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)]$$

soit, après simplification par $\underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)]$, simplification que nous ferons directement quand nous aurons bien assimilé le mécanisme de ce type de calcul :

$$c^2\,k^2 = \omega^2 - \jmath\,\omega/\tau$$

On remarque d'ores et déjà que ω et k ne peuvent être tous les deux réels. Nous nous intéresserons dans ce cours à des phénomènes du genre «régime permanent établi», c'est à dire qui ne s'étouffent ni ne deviennent explosifs dans le temps ; dans ce cas ω est réel et donc k complexe.

Par ailleurs, l'équation de d'Alembert conduisait à $k/\omega = c = Cte$; ici, $k/\omega \neq Cte$; donc la vitesse de propagation n'est plus une constante. Comme, en optique, le fait que, dans le verre, la vitesse de la lumière dépende de la couleur, conduit à la dispersion de la lumière par le prisme, on généralise en disant que, dans la situation étudiée ici, le milieu est dispersif et la relation qui lie k à ω s'appelle relation de dispersion.

IV-3 Absorption

Ne cherchons pas ici à prendre la racine carrée d'un nombre complexe, puisqu'il ne s'agit que d'un exemple. Dans tout ce genre de situation on arrive à $k = k_1(\omega) - \jmath\,k_2(\omega)$ où $k_1(\omega) = Re(\omega)$ et $k_2 = -Im(\omega)$.

Reportons dans $y(x,t) = Re(\underline{y}(x,t)) = Re\{\underline{y_m}\,\exp[\jmath\,(\omega\,t - k\,x)]\}$ où $\underline{y_m} = y_m\,\exp(\jmath\,\varphi)$; on arrive à :

$$y(x,t) = Re\{y_m\,\exp(-k_2\,x)\,\exp[\jmath(\omega t - k_1\,x + \varphi)]\} = y_m\,\exp(-k_2\,x)\,\cos[\jmath(\omega t - k_1\,x + \varphi)]$$

On retrouve une onde progressive sinusoïdale, à ceci près que sa propagation s'accompagne d'un amortissement en $\exp(-k_2\,x)$ qu'on peut aussi noter $\exp(-x/\delta)$; $\delta = 1/k_2$ est une distance caractéristique d'amortissement. L'amplitude de l'onde est divisée par 100 (respectivement 1000) sur une distance de $\delta\,\ln(100) = 4,6\,\delta$ (respectivement $\delta\,\ln(1000) = 6,9\,\delta$, disons $7\,\delta$).

Quand ce sera possible, une étude énergétique sera plutôt intéressante.

On remarquera que l'absorption pourra être négligée quand $|k_2| \ll |k_1|$.

IV-4 Dispersion

On se place ici dans le cas d'une absorption négligeable, sinon l'étude de la propagation n'aurait guère de sens.

IV-4.a Onde sinusoïdale pure

On a donc une onde en $y_m\,\cos(\omega\,t - k_1(\omega)\,x + \varphi)$. Par identification à $\cdots\cos[\omega(t - x/c) + \varphi]$, on en déduit que la vitesse de propagation, qu'on appellera désormais *vitesse de phase* et qu'on notera V_φ, s'exprime par $V_\varphi = \omega/k_1(\omega)$ ou plutôt $1/V_\varphi = k_1(\omega)/\omega = Re(k(\omega))/\omega$.

Cela dit, une onde purement sinusoïdale a un côté particulièrement monotone : rien n'y change et elle ne véhicule donc aucune information.

IV-4.b Intérêt de la modulation

Supposons que deux émetteurs radio veulent émettre l'un la première symphonie de Gustav MALHER, dite symphonie Titan, et notée ici $f_1(t)$ et l'autre l'intégrale des sermons de l'abbé LÉLAINE[1], notée ici $f_2(t)$; il est clair qu'un recepteur à portée des deux émetteurs captera la *superposition*, c'est à dire la somme des signaux et que les sermons empêcheront l'écoute de la Symphonie Titan. Il faut donc trouver une astuce et cette astuce est la modulation, dans sa version la plus simple la modulation d'amplitude. Le premier émetteur multiplie $f_1(t)$ par une sinusoïde haute fréquence $\cos(\Omega_1\,t)$ appelée porteuse (typiquement Ω_1 de l'ordre de 1 MHz, disons 1 MHz tout rond) ; pour simplifier l'exposé, réduisons f_1 à $f_1(t) = a_1\,\cos(\omega_1\,t)$ où ω_1 est une fréquence audible, disons de 0,1 kHz à 30 kHz. Il émet donc :

$$a_1\,\cos(\Omega_1\,t)\,\cos(\omega_1\,t) = (1/2)\,\cos[(\Omega_1 + \omega_1)\,t] + (1/2)\,\cos[(\Omega_1 - \omega_1)\,t]$$

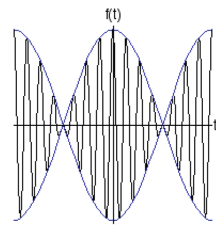
c'est à dire une somme de deux sinusoïdes de pulsations $\Omega_1 \pm \omega_1$, donc, comptre tenu de la valeur maximale de la fréquence de f_1, dans une plage de fréquence $[0,97\,\text{MHz}, 1,03\,\text{MHz}]$

Vous avez déjà compris que l'autre émetteur fait la même chose avec une porteuse différente, disons 1,2 MHz et qu'il émet donc deux fréquences dans la bande $[1,17\,\text{MHz}, 1,23\,\text{MHz}]$ et qu'il suffira au récepteur, grâce à un filtre passe-bande réglable, d'isoler l'une ou l'autre des plages pour isoler l'un ou

1. un héros de Raymond QUENEAU

l'autre des signaux. Il restera certes à démoduler, ce n'est pas l'objet de ce cours, mais ce sera vu en travaux pratiques.

Remarque : comment tracer le graphe de la porteuse modulée ? Notons formellement $F(t) = a \cos(BF) \cos(HF)$ (HF et BF pour haute et basse fréquence). Comme $-1 \leqslant \cos(HF) \leqslant 1$, on a $-a \cos(BF) \leqslant F \leqslant a \cos(BF)$ et on trace sur un même graphe $\pm a \cos(BF)$ puis F va de l'une à l'autre de ces courbes à la HF ; on a donc :



IV-4.c Propagation d'une porteuse modulée

L'émetteur, en $x = 0$, émet donc :

$$a_1 \cos(\Omega\, t) \cos(\omega\, t) = (1/2) \cos[(\Omega + \omega)\, t] + (1/2) \cos[(\Omega - \omega)\, t]$$

Les deux termes génèrent deux ondes en $\cos(\omega\, t - k(\omega)\, x)$; un récepteur en x reçoit donc :

$$(1/2) \cos[(\Omega + \omega)\, t - k(\Omega + \omega)\, x] + (1/2) \cos[(\Omega - \omega)\, t - k(\Omega - \omega)\, x]$$

et un peu de trigonométrie ramène à :

$$a_1 \cos(\Omega\, t - k_p\, x) \cos(\omega\, t - k_m\, x)$$

avec $k_p = (1/2)[k(\Omega + \omega) + k(\Omega - \omega)]$ et $k_m = (1/2)[k(\Omega + \omega) - k(\Omega - \omega)]$.

Un développement de Taylor de $k(\Omega \pm \omega)$ à l'ordre 1 autour de Ω donne $k_p = k(\Omega)$ et

$$k_m = \omega \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\Omega}$$

Le premier facteur, la porteuse donc, se propage à la vitesse $\Omega/k_p = \Omega/k(\Omega)$, c'est à dire à la même vitesse que si elle n'était pas modulée. Par contre le second facteur, c'est à dire la modulation, se propage à une vitesse différente ω/k_m, appelée *vitesse de groupe* et notée V_g ; on a donc :

$$1/V_g = \left.\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\Omega}$$

(remarque dans tout le calcul k a été mis pour k_1 pour alléger d'où le résultat final.)

remarque : pour V_g, vitesse de la *modulation*, la dérivée de k_1 est prise au point correspondant à la pulsation de la *porteuse*, c'est source d'erreur : bien y faire attention !

IV-4.d Paquet d'ondes

Une onde sinusoïdale est non seulement sans intérêt vis-à-vis de la communication, mais elle est aussi totalement irréaliste, car censée exister de toute éternité et jusqu'à la fin des temps. On observe en réalité des trains d'onde ou paquets d'ondes qu'on peut représenter par $f(t) = g(t)\,\exp(\jmath\,\Omega_0\,t)$ où $g(t)$ d'une part varie lentement sur des temps de l'ordre de la pseudo-période $2\,\pi/\Omega_0$ et d'autre part est nulle en dehors d'un intervalle $[t_1, t_2]$ avec $(t_2 - t_1)$ grand devant la pseudo-période $2\,\pi/\Omega_0$.

La notion de transformée de Fourier permet de considérer que $f(t)$ est somme de vraies sinusoïdes et l'on se ramène, en plus compliqué, au cas précédent où la porteuse $\exp(\jmath\,\Omega_0\,t)$ se propage à la vitesse V_φ et la modulation (car c'en est une) $g(t)$ à la vitesse V_g.

Les calculs qui suivent ne sont pas au programme, mais élargissent de façon intéressante le cours. Plaçons nous dans le cas le plus simple où $g(t) = 1$ dans l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et $g(t) = 0$ en dehors. On rappelle que :

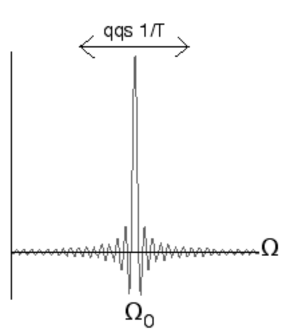
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\Omega)\,\exp(\jmath\,\Omega\,t)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\tilde{f}(\Omega) = Cte \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\exp(-\jmath\,\Omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

Ici, les calculs sont aisés et on tire :

$$\tilde{f}(\Omega) = Cte \int_{-T/2}^{T/2} \exp[\jmath\,(\Omega_0 - \Omega)\,t)\,\mathrm{d}t = \cdots = T\,\frac{sin[(\Omega_0 - \Omega)\,T/2]}{[(\Omega_0 - \Omega)\,T/2]} = T\,\mathrm{snc}[(\Omega_0 - \Omega)\,T/2]$$

Remarque : on note $\mathrm{snc}(u)$ la fonction $\sin(u)/u$ et on l'appelle ≪sinus cardinal≫, elle fera un bon bout de route avec nous. Le graphe ci-dessous ($\mathrm{snc}[(\Omega_0 - \Omega)\,T/2]$) montrent que l'étendue *spectrale* (c'est à dire en fréquence/pulsation) de $\tilde{f}$ est de quelques fois $1/T$ autour de Ω_0 donc d'autant plus serrée que T est plus long, ce qui est normal, car alors on se rapproche de la sinusoïde éternelle. N'oublions pas de remarquer que $T \gg 1/\Omega_0$ entraîne $1/T \ll \Omega_0$.



Revenons à un $g(t)$ quelconque. Chaque terme $\tilde{f}(\Omega)\,\exp(\jmath\,\Omega\,t)$ génère une onde en $\tilde{f}(\Omega)\,\exp[\jmath\,(\Omega\,t - k(\Omega)\,x)]$ et au total, on aura un phénomène en :

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\Omega)\,\exp[\jmath\,(\Omega\,t - k(\Omega)\,x)]$$

Si l'on se limite à un développement de TAYLOR de $k(\Omega)$ autour de Ω_0, soit, avec la définition de V_g, $k(\Omega) = k(\Omega_0) + (1/V_g)(\Omega - \Omega_0)$ et si l'on remarque que $\Omega = \Omega_0 + (\Omega - \Omega_0)$, on arrive aisément, avec $V_\varphi = \Omega_0/k(\Omega_0)$, à :

$$f(x,t) = \exp[\jmath\, \Omega_0\, (t - x/V_\varphi)] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\Omega)\ \exp[\jmath\, (\Omega - \Omega_0)\, (t - x/V_g)]$$

et l'on retrouve à nouveau le produit d'une porteuse se déplaçant à la vitesse V_φ et d'une modulation se déplaçant à la vitesse V_g. Les calculs ne sont guère aisés, heureusement, ils ne sont pas au programme !

Complément : pour x assez grand, l'erreur commise par le D.L. sur $k(\Omega)\,x$ devient importante, on est alors obligé de pousser plus loin le développement de TAYLOR de $k(\Omega)$. Avec une fonction $g(t)$ de type gaussienne $g(t) = \exp(-(t/T)^2)$, les mathématiciens montrent et nous leur en savons gré, qu'en plus de son déplacement à la vitesse V_g, la modulation, c'est à dire le paquet d'ondes se déforme : il s'étale dans le temps (en gros proportionnellemnet à la distance parcourue) et s'affaiblit, conservation de l'énergie oblige. On peut prévoir ce résultat intuitivement : les différentes composantes sinusoïdales ne vont pas à la même vitesse ; pour aller de 0 à x, elle mettent un temps entre x/V_{max} et x/V_{min} d'où un étalement dans le temps proportionnel à x : $x\,(1/V_{min} - 1/V_{max})$.

L'équation de d'ALEMBERT permet des solutions $f(t - x/c)$, avec f quelconque, qui se propagent sans déformation ; si on lui ajoute des termes, les ennuis commencent !